Gondolkodási eljárások tanulása

Zsinkó Erzsébet
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar

A matematikai problémák sikeres megoldásának egyik kulcskérdése, hogy a tanulók ki tudják-e választani és tudják-e alkalmazni a megfelelő gondolkodásmódokat. Ehhez többféle gondolkodási eljárás megismerésére és elsajátítására van szükség. Mit tehet a tanító annak érdekében, hogy hozzásegítse tanítványait gondolkodási eljárások tanulásához? A válasz egyértelmű: jól megválasztott problémafelvetésekkel és tapasztalásra alkalmas tevékenységek szervezésével hozzájárul a tanulási készségek és az önálló tanulás módjainak fejlesztéséhez. Ebben a cikkben tankönyvi feladatok elemzésével mutatok olyan példákat, amelyek alkalmasak gondolkodási eljárások tanulásának támogatására.

Kulcsszavak: *tanulás, gondolkodási eljárás, képességfejlesztés, alkotás, fogalomalkotás*

Bevezetés

A gondolkodásról és annak fejlesztéséről nagyszámú szakirodalom alapján tájékozódhatunk. Cikkekben, tanulmányokban olvashatunk olyan kutatásokról is, amelyek kisiskolások gondolkodási képességeinek vizsgálatáról vagy fejlesztési lehetőségeiről szólnak. A matematikai képességek közül *Vidákovics* (2008) kiemeli az induktív, deduktív, kombinatív, rendszerezési és korrelatív gondolkodás képességét.

Az oktatás-irányítás dokumentumaiban is megfogalmazódik az igény, hogy a nyomtatott taneszközök alkalmasak legyenek gondolkodási eljárások tanulására. Ezt igazolja a „Pedagógiai szakértői értékelőlap", melyben a fentiekhez hasonló képességfejlesztés szükségességéről olvashatunk. Például a rendszerező és a kombinatív képességek, valamint a kritikai gondolkodás fejlesztésének elvárásáról. A nyomtatott taneszközöknek lehetőséget kell adniuk „az elemzésre, a direkt és indirekt bizonyításra, a következtetésre, a konkretizációra, az absztrakcióra, az általánosításra, az induktív, a deduktív és a korrelatív gondolkodási képességek"[1] fejlesztésére is.

Ez a cikk nem vállalkozhat a különféle gondolkodási képességfejlesztések átfogó rendszerezésére. Csupán néhány példát mutat a gondolkodás egyes típusainak mozgósítására alkalmasan megválasztott feladatokon és feldolgozásukon keresztül.

A bemutatásra kerülő feladatok értékét, sokszínűségét és fejlesztő hatását megoldás közben könnyű átlátni, átgondolni, ezért javaslom, hogy szánjon az olvasó időt a megoldásra, mielőtt az elemzést elolvasná!

A feladatok abból a C. Neményi-féle tankönyvcsaládból származnak, amely jelenleg nincs a magyar tankönyvlistán, ugyanakkor Finnországban – ahol egyre jobbak a matematikatanulás eredményei – használják a tankönyvcsalád adaptált változatát. Ezek a tankönyvek alapul veszik a Skemp által – a fogalom épülésével kapcsolatban – megfogalmazott igazságot, melynek lényege, hogy kisgyerekkorban a valóság megismerése csak induktív úton kezdődhet. A gondolkodási eljárások is a cselekvő módon, személyesen bejárt úton alakulnak.

Példák alkotást igénylő problémafelvetésekre

Tevékenységek közben a gyerekek tapasztalatokat gyűjtenek, ismeretekre tesznek szert, cselekvés közben gondolkodási műveleteket végeznek, fizikai eljárások által gondolati eljárásokat tanulnak. Az alkotások közben analizálnak,

[1] https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tankonyv/05a_pedagogiai_szakertoi_ertekelolap_tk_20170330.doc (letöltés ideje: 2017. márc. 30.)

DOI 10.31074/gyn2018199107

Zsinkó Erzsébet: orcid.org/0000-0002-2335-5125

összefüggéseket keresnek, és fedeznek fel, szintetizálnak. A fogalmak megértéséhez többet ad az alkotás közben átélt tapasztalat, mint a kész objektumok szemlélése, elemzése. A matematika minden területe alkalmas arra, hogy a gyerekek saját alkotásokat hozzanak létre.

Számok alkotása különböző feltételek alapján számjegy-kártyákból, számjegyekből

A következő hat számkártyából egyszerre három kétjegyű szám állitható össze.

| 8 | 6 | 1 | 2 | 3 | 9 |

Készitsd el úgy a három kétjegyű számot, hogy
a) mindegyik nagyobb legyen 50-nél!
b) a lehető legkisebb számegyenes-darabon legyen a három szám!
c) be lehessen illeszteni őket ebbe a számsorba:
30 < …… < 50 < …… < 70 < …… < 90

Például: 3. osztályos tankönyv, 21. oldal, 40. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002)

A feladat a) része többnyire nem okoz problémát a gyerekeknek, ha számkártyákat adunk a kezükbe és kérjük az előállított számok ellenőrzését. Azonban várhatóan lesznek tanulók, akik számára a kártyák húzogatása közben tudatosul, hogy a szám nagyságát a (leg)nagyobb helyiértéken álló számjegy befolyásolja elsősorban, tehát a tízes helyiértékre válogatják a 8, 6, 9 számjegyeket. Miközben keresik a maradék három számkártya helyét, felismerhetik, hogy ezek tetszőleges elhelyezése esetén a feltételnek megfelelő számokhoz jutnak. A gyorsabbak talán biztatás nélkül is megkeresik mind a hat lehetséges megoldást, amellyel egy önállóan alkotott kombinatorikai problémát oldanak meg.

Összetettebb gondolkodást igényel a b) feladat. Mikor kerülnek egymáshoz közel a számok? Mikor lesz a köztük lévő különbség kicsi? Elegendő most is a tízes helyiértéken lévő számjegyekre figyelni? Természetesen fontos, hogy a tízesek eltérése a lehető legkisebb legyen, így a számok első számjegye 1, 2, 3 lehet. De kirakás közben rájöhetnek a gyerekek, hogy az egyesek elrendezése is csökkentheti a különbséget, hiszen, ha a legkisebb számban az egyesek számát a lehető legnagyobbra, a legnagyobb számban pedig a lehető legkisebbre választjuk, akkor lesz a számok közti különbség a lehető legkisebb. Így, ennek a feladatnak egy megoldása van. A három szám: 19, 28, 36. Természetes, hogy a különféle megoldási javaslatokat is ellenőrizzük, és megállapítjuk, hogy mely esetben milyen hosszú számegyenes-darabon áll a három szám.

Az előzőek után a c) feladatban biztosan sok tanuló fogja hezitálás nélkül elhelyezni először a tízesek számát, és csak elvétve találkozhatunk azzal, hogy valaki a 36-ot vagy a 38-at elhelyezi a 30 és az 50 közé. Ha mégis, akkor rá fog jönni, hogy később szüksége lesz a 6-os számkártyára ahhoz, hogy 50 és 70 közötti számot is tudjon alkotni.

A feltételek szerinti számalkotások során tapasztalhattuk, hogy a meglévő ismeretek alkalmazásán túl fontos szerephez jut a becslés, az összehasonlítás, a számolás, a számolásos következtetés, a kombinálás is.

Számok közelítése adott számokból műveleti jelek választásával

Írd be a műveleti jeleket!

	867	359	≈	500
	442	372	≈	800
678	243	119	≈	300
678	243	119	≈	600
678	243	119	≈	1000

456	361	698	≈	800
456	361	698	≈	100
698	361	456	≈	600
698	361	456	≈	800
698	361	456	>	1000

Írásbeli művelettel ellenőrizd elgondolásodat!

Például: 3. osztályos tankönyv, 138. oldal, 37. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).
A feladat az írásbeli összeadás és kivonás fejezet végén található.

Amikor az önálló munkára kijelölt írásbeli műveletvégzések előtt becslésre bíztatjuk a gyerekeket, gyakran tapasztalhatjuk, hogy többen fordított sorrendet választanak. Először (akár fejben) elvégzik a műveletet, és annak eredményét kerekítik, hogy választ adjanak a becslést firtató kérdésre is. Esetleg azért, mert tartanak attól, hogy túl nagy lesz az eltérés a becslésük és a művelet eredménye között.

Miért is erőltetjük a művelet eredményének előre becslését? Nyilván azért, hogy a nagy eltérés felhívja a figyelmet az esetleges hibára.

Ez a feladat nem engedi a becslés megkerülését, felszólítás nélkül is becslésre ösztönzi a feladat megoldóját. Tudatosul, hogy mitől lesz kisebb vagy nagyobb egy műveleti sor eredménye. Észrevehetik, ha a műveletek sorrendje változást okoz. A feladat megoldása és az önellenőrzés nemcsak a becslőképesség és az írásbeli számolási képesség fejlesztését szolgálja, hanem az összefüggés-keresésben, összefüggés-megértésben is támogatja a gondolkodást.

Számsorozatok alkotása

Folytasd a sorozatot! Írd alá a különbségeket!

34 36 39 41 ....

....

Mit gondolsz, melyik szám lesz benne a sorozatban a következők közül?

1997, 1998, 1999, 2000, 2001

Például: 4. osztályos munkafüzet, 122. oldal, 2. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).

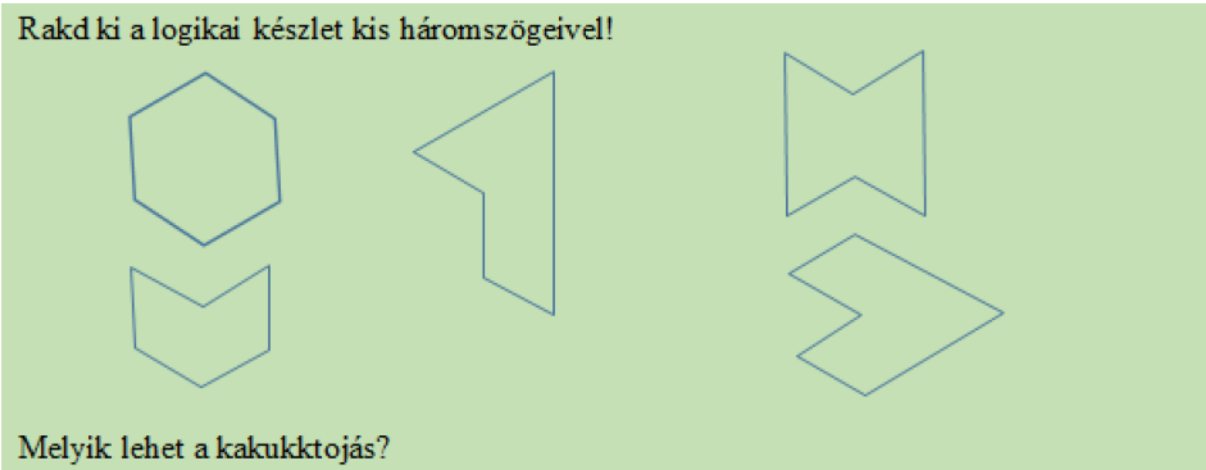
A gyerekek az utasításban kapják meg azt a kicsi segítséget, amely alapján váltakozó különbséggel tudják folytatni a sorozatot. Ennek a szabálynak a rögzítését követő sorozatalkotás során már feltűnhet sokak számára az egyes helyiértéken álló számjegyek periodikus váltakozása, azaz, hogy csak a 4, 6, 9, 1 állhat az egyesek helyén, de a megfigyelést ösztönzi a felvetett kérdés is.

Természetesen, a megbeszélés során újabb provokatív kérdésekkel kicsalogathatunk meggyőző indoklásokat is. Honnan lehet azt tudni, hogy az első 10–12 tagnál megfigyelt tulajdonság vég nélkül folytatódik? Miért lehetünk biztosak abban, hogy nem lesz köztük egyetlen 8-ra végződő szám sem? Azt is meg tudjuk mondani, hogy hányadik tagja lesz a sorozatnak az 1999, anélkül, hogy az összes előtte álló tagot felsorolnánk? Miközben a gyerekek választ keresnek ezekre a kérdésekre, fontos ismereteket alkalmaznak. Megállapítják, hogy minden negyedik szám (2+3+2+3=) 10-zel nagyobb, így a 39-től induló, tízesével növekvő sorozat minden tagja benne lesz a sorozatban. Ez pedig azt jelenti, hogy ha az egyesek helyén 9-es áll, akkor az ilyen szám biztosan megtalálható a sorozatban. Hasonlóan érvelhetnek a 4-re, 6-ra és 1-re végződő számok mellett is. Ez indokolja azt is, hogy más végződésű szám nem tagja a sorozatnak. Azt is megállapíthatjuk, hogy az 1999 a sorozat 787., a 2001 pedig a 788. tagja, hiszen 41-től 2001-ig 197 db 1-re végződő szám van, de csak minden negyedik szám ilyen, így a 2001 a 4·197=788. szám a sorozatban. Persze azt is észrevehetik a gyerekek, hogy a 34-től induló, ötösével növekvő és a 36-tól induló, ugyancsak ötösével növekvő sorozatok összefésülésével jött létre ez a váltakozó különbségű sorozat.

A sorozatalkotás során tett megfigyelés sejtés megfogalmazását, összefüggés-felismerést ösztönöz, a kérdésfeltevés tudatosításhoz, sőt akár általánosításhoz is vezethet. A provokatív kérdések felkeltik a bizonyítás igényét.

Geometriai alkotások

Sokszögek kirakása



Például: 3. osztályos tankönyv, 59. oldal, 4. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

Első látásra, a feladat megoldása nélkül, valóban a címben megfogalmazott tartalom jut csak eszünkbe. Amint hozzálátunk a kirakáshoz, akár kérdezés nélkül is további tartalmakat fedezhetünk fel. Például, hány háromszögre van szükség egy-egy alakzat lefedéséhez? (Területmérés.) Miközben elhelyezzük a háromszögeket, oldalhosszakat, szögeket hasonlítunk össze, formákat figyelünk meg, szimmetriákat veszünk észre.

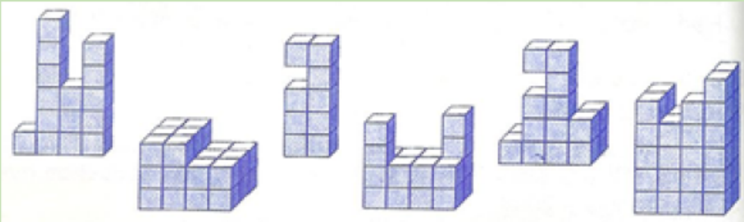
Ha válaszolni szeretnénk a feladatban megfogalmazott kérdésre, az öt alakzat közül 4-nek keressük azt a közös tulajdonságát, amellyel az ötödik alakzat nem rendelkezik. (Címkézés.) Vajon melyik lehet a kakukktojás? Talán a hatszög? Lehet, ha egy van belőle! Ellenőrizzük! Azt vesszük észre, hogy 4 hatszög van köztük, így a csúcsok száma szerint éppen az a kakukktojás, amelyiknek csak 5 csúcsa van. ()

Azt is észrevehetjük, hogy ez az alakzat nem csak a csúcsok számában tér el a többi alakzattól, hanem az oldalak számában is, és abban, hogy ez az egyetlen alakzat, amelyik nem tükrös. A csúcsok számlálásakor több alakzatnál is segítségre szorulhatnak a gyerekek, azonban biztosan nem lesz probléma a szabályos hatszög csúcsainak megszámlálása. Közben kimondtuk a tulajdonságot, ami az első hatszöget megkülönbözteti az összes többitől, így a szabályos hatszög is lehet kakukktojás. Valóban, de találhatunk más tulajdonságot is, ami megkülönbözteti a többitől. Egy ilyen alakú kertben nem érdemes bújócskázni (konvex), míg a többiben igen (ezek nem konvexek). Ennek az alakzatnak 6 tükörtengelye van, a többinek nincs ennyi. Viszont a tükörtengelyek száma alapján lehet kakukktojás a jobb felső () síkidom is, hiszen ez az egyetlen alakzat, amelynek 2 tükörtengelye van. Vajon lehet-e kakukktojás az 1 tükörtengellyel rendelkező két sokszög közül valamelyik? Ha elvégezzük a kis háromszögekkel a lefedéseket, láthatjuk, egy olyan alakzat van köztük, aminek a lefedéséhez csak 4 háromszögre van szükség (), így a terület szerint ez is eltér az összes többitől. De megfogalmazhatunk összetett állítást is erről az alakzatról, amely megkülönbözteti az összes többitől: minden oldala egyenlő hosszú és nem konvex.

Ez az egyszerűnek tűnő feladat többféle tartalomhoz kapcsolódik, újabb tulajdonságokra irányíthatja a figyelmet, korábban tanult ismereteket mozgósít, fejleszti a halmazszemléletet, tudatos megfigyelést igényel, összehasonlítást, azonosítást és megkülönböztetést végeznek közben a gyerekek és kreativitásra ösztönöz.

Az egyszerű „másolással” elvégzett alkotás is fejleszthet egyszerre különféle gondolkodási képességeket. Szép példája ennek a 3. osztályos tankönyv, 58. oldal, 3. feladata (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

Építsd meg, amelyiket tudod! Ha szükséges, állítsd másképpen!

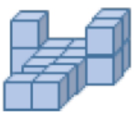


Építsd meg mindegyiket más színű rudakkal is: ha több kiskockát be lehet váltani nagyobb rúdra, cseréld fel vele! Vigyázz arra, hogy ugyanolyan alakú legyen az új építmény is!

Ahhoz, hogy a képen látható építményeket a gyerekek maguk is meg tudják alkotni, először szükség van tudatos, elemző megfigyelésre: hány kockából épült a test, azok hogyan helyezkednek el egymáshoz képest. Elképzelik, vagy az építés során tapasztalják, hogy két alakzat csak másként állítva építhető meg.

A harmadikat akár kétféle állásban is felépíthetik,

míg az ötödiket csak egyféleképpen:



Ez a térbeli forgatás komoly térlátást igényel. És éppen ez által hozzájárul a térlátás fejlődéséhez.

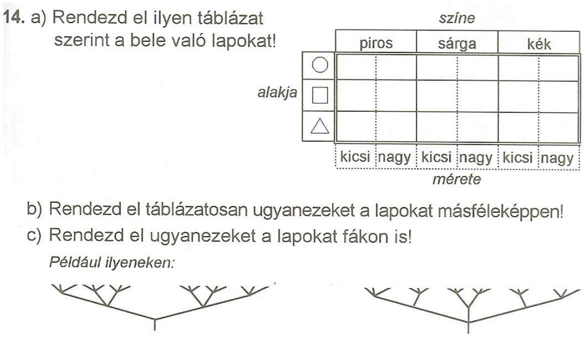
Amikor több kiskockát váltanak be nagyobb rúdra, az alak és a méret azonosítása a cél. Az ilyen tevékenységek (másolások azonos és más elemekkel) indítják el az egybevágóság fogalmának alakítását.

A kombinatorikus gondolkodás eljárásainak tanulása

A kombinatorikus gondolkodás formálására is sok példát sorakoztathatunk. A tankönyvcsalád nem akar belesulykolni a gyerekek fejébe kiszámítási módokat, de még csak eljárásokat, módszereket sem kíván rájuk kényszeríteni a lehetséges esetek előállítása érdekében. Figyelembe veszi a Varga Tamás által megfogalmazott fejlesztési folyamatot (*Varga*, 1977), melynek első lépcsőfoka az adott feltételnek megfelelő egy vagy több eset előállítása. Erre találunk kedves, tevékenységet igénylő feladatokat már az 1. osztályos tankönyvben, melynek során a gyerekek megalkotják a többféle sorrendet. 2. osztályban fadiagram segítségével kicsi elemszám esetén eljuthatnak az adott feltétel szerinti minél több, sőt, az összes eset előállításához.

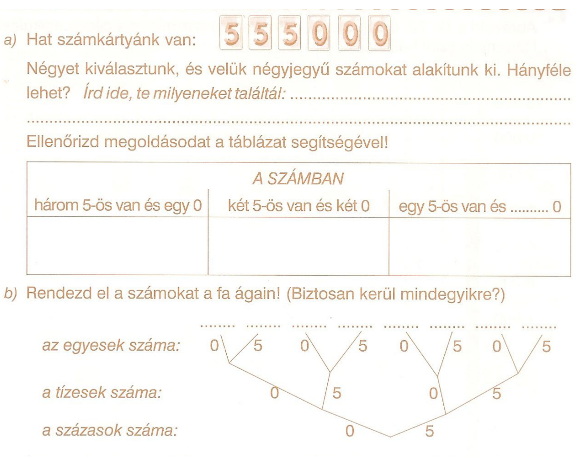
3. osztályban elkezdődik a gyerekek gondolkodásának tapintatos irányítása, hogy maguk fedezzenek fel követhető eljárásokat,

amelyek követésével megtalálják a feltételnek megfelelő összes esetet. Ezt szolgálják először a már előállított elemek önálló elrendezésére való felszólítások (hogy a hiányt vagy az ismétlődést egyszerűbb legyen felismerni). Ezt segítik a fadiagramon való ábrázolások, a táblázatba rendezések, a javasolt egyszerűsített rajzok, vagy a kísérletek lehetséges kimeneteleinek megfigyeltetése játékok során. Szép példákat találunk a modellek közti kapcsolat felismertetésére is.



Például: 3. osztályos tankönyv, 83. oldal, 14. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

4. osztályban újabb lépést tehetnek a gyerekek az összes eset megkeresésében a talált esetek rendezésével és a rendszerben talált hiányok keresésével.



Például: 4. osztályos munkafüzet, 29. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).

A feladat b) részében az ágrajzon nem jelenik meg az az ág, hogy az ezresek száma 5 – hiszen 0-val nem kezdődhet a négyjegyű szám. Ennek felismertetése, megbeszélése hozzájárul az önálló megfigyelés motiváltságához.

Ezek a tevékenységek, módszerek ráirányítják a figyelmet a rendteremtés lehetőségére és hasznára a kombinatorikus feladatok megoldásában és általában az ismeretek rendszerezése területén is.

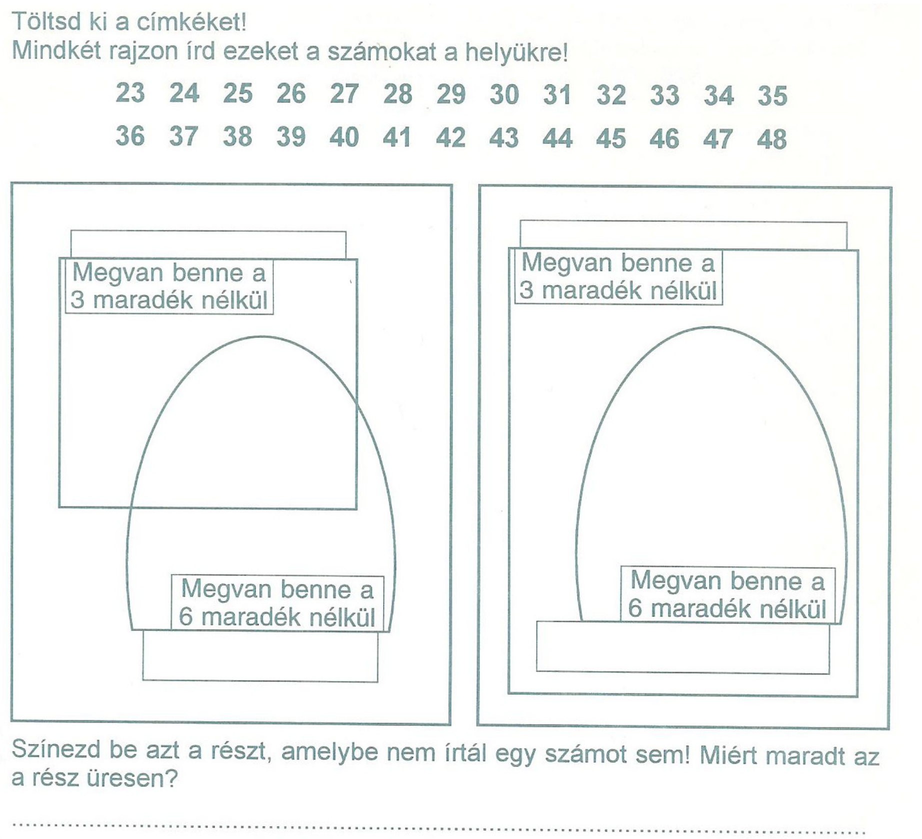
A fogalmak építése

A gondolkodási folyamatok közül kiemelt szerepe van a fogalomalakulásnak és a fogalmak közti kapcsolatrendszerek, összefüggések alakulásának. A fogalomalakítás folyamatáról részletesen olvashatunk *Skemp* (2005) könyvében. Ennek leegyszerűsített lépései: 1. A sok egyedi példa közös tulajdonságát megragadva alakul a fogalomról az elsődleges képzet. 2. A közös jegyek, hasonlóságok szerint összetartozó képzetek egy osztályt alkotnak, ezek az elsődleges fogalmak. 3. Az elsődleges fogalmak közös tulajdonsága alapján épülnek a másodlagos fogalmak. 4. „Egyre absztraktabb fogalmak láncolatai alakulnak ki gondolkodásunkban: bármelyik kialakulásához az absztrakciós skálán alá tartozó fogalmak meglétére és mobilizálhatóságára van szükség." (*C. Neményi*, 2003. 226. o.)

A C. Neményi-féle tankönyvcsalád legnagyobb értéke, hogy gondoskodik a fogalmak folyamatos épüléséről és egymáshoz kapcsolásáról, a fogalmi rendszer alakításáról. Mindegyik fogalom érzékszervi tapasztalásra épül. Az alakítandó fogalom sokféle konkrét tartalommal, sokféle helyzetben, különféle más fogalmakhoz kapcsolva jelenik meg, amelyeket a kisgyerek számos módon érzékel, (tapint, lát, hall) és számos teendőt végez vele. A sokféle módon megjelenő állandó tulajdonság felerősödik, és a kisgyerek emlékezete a tapasztalt közöset raktározza el. Általában így alakulnak az elsődleges fogalmak, amelyek többnyire tárgyak, tulajdonságok egy-egy osztálya, mint például a kettő, öt…, háromszög, négyszög…, fél, harmad… (*C. Neményi*, 2003).

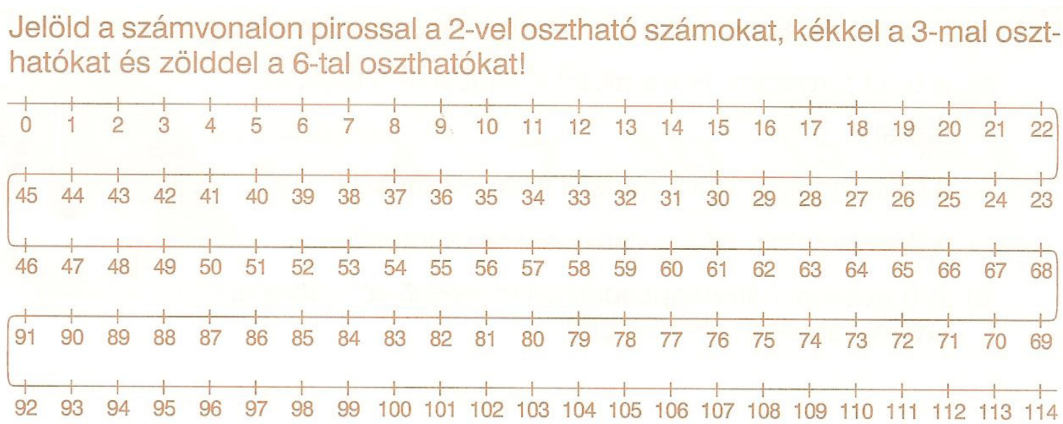
A szerzők betartják a célszerű sorrendet, késleltetik a fogalom megnevezését és jelölését, és csak az elsődleges fogalmak kialakítását követi a másodlagos fogalmak építése, mint például (a kettő, öt… elsődleges fogalmakhoz kapcsolva) a szám, (a háromszög, négyszög… tartalmak megismeréséhez) a sokszög, (a fél, harmad, háromnegyed… egyedi fogalmakhoz) a törtszám.

A tiszta, szakszerű fogalomalakításhoz hozzátartozik a fogalmak egymáshoz való viszonyának formálása, tudatosítása. A kisiskolások számára is érthető módon fedeztetik fel az egymás mellé rendelt, vagy az alá- és fölérendelt fogalmak kapcsolatát.



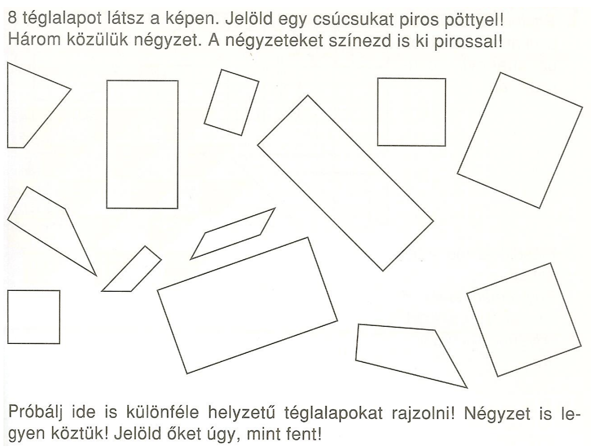
Például: 3. osztályos munkafüzet, 73. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

Ugyanazoknak a számoknak a kétféle ábrán való elhelyezése, valamint a különbségre irányított figyelem segíti, hogy a gyerekek maguk fogalmazzák meg a 3 és a 6 többszöröseinek kapcsolatát. Azt is megfigyelhetjük, hogy a szerzők nem akarják túl hamar lezárni, készre kimunkálni az ismeretet, a 4. évfolyamon (és később) további tevékenységek járulnak hozzá a tudatosításhoz, mint például többszörösök jelölése számegyenesen (4. osztályos munkafüzet, 85. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).



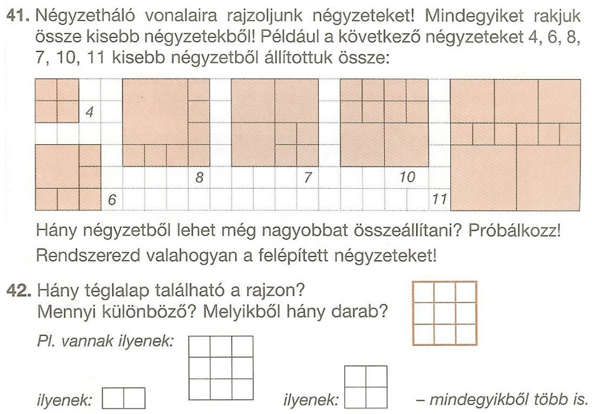
Fogalomalakítás a geometria témaköréből

Érdemes megfigyelni a fogalomalakítás folyamatát a geometria területén is, ahol egy általánosabb fogalomtól haladunk a speciális fogalmak felé. Első osztályban konkrét alakzatok megfigyelése, válogatása, papírból, szívószálból való előállítása, oldalainak, csúcsainak számlálgatása elegendő pl. a négyszög fogalmának alakulásához. Már első osztálytól, vagy akár még előbb használják a téglalap, négyzet szavakat, de a fogalmakat még csak ráismerés szinten ismerik. Másodikban tevékenységekkel kezdik megismerni az alakzatok tulajdonságait. Megfigyelik, hogy a téglalapot pontosan félbe lehet hajtani mindkét szemközti oldalpár közepénél. E szerint kiválogatják a négyszögek közül a téglalapokat. Tapasztalatot szereznek arról, hogy a négyzetet nem csak a két szemközti oldalpár közepénél, hanem a csúcsain át is félbe lehet hajtani. A tapasztalatok után konkrét feladatban találkoznak először azzal a megfogalmazással, hogy a négyzet is téglalap (2. osztályos munkafüzet, 97. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Sz. Oravecz*, 1998)).



A 3. osztályos tankönyv, amikor téglalapról beszél, természetes módon jelenteti meg a konkrét elemek között az egyenlő oldalhosszúságú téglalapokat, de fontosnak tartja észrevetetni, hogy ezek közül miért kaptak külön nevet a négyzetek, milyen tulajdonságaik figyelhetők meg, amelyekkel viszont nem rendelkezik minden téglalap. Ilyen tulajdonság a 4 tükörtengely (3. osztályos tankönyv, 155. oldal, 6. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002)), vagy a negyedrendű forgásszimmetria (3. osztályos tankönyv, 156. oldal, 11. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002)), illetve annak felismertetése, hogy a négyzetek mind hasonlóak egymáshoz (3. osztályos tankönyv, 156. oldal (*C. Neményi és Wéber*, 2002)).

4. osztályban további tapasztalatokat szereznek a szomszédos oldalak merőlegességéről, a szemközti oldalak párhuzamosságáról, a szögek és a szemközti oldalak egyenlőségéről, valamint az alakzatok területének és kerületének méréséről. Összegzik, megfogalmazzák és alkalmazzák ismereteiket.



Például: 4. osztályos tankönyv, 127. oldal, 41. feladat, 128. oldal, 42. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).

Ezek a példák jól mutatják azt a folyamatot, melynek során a gyerekek megalkotják maguk számára a fogalmakat, bővíthetik meglévő ismereteiket, illetve alkalmazhatják azokat a problémamegoldások során.

Összegzés

A taneszközök mintát mutatnak arra, hogyan lehet elérni azt, hogy a gyerekek úgy érezzék, ők találnak fel jól működő eljárásokat, ők fedeznek fel érdekes összefüggéseket, és hogy képesek az önálló problémamegoldásra, mások meggyőzésére megoldásuk helyességéről.

A gondolkodás fejlesztésében természetesen a felsorolt és elemzett feladatok más-más feldolgozás esetén nem egyformán hatékonyak. Ha bármelyiket előkészítés nélkül bízzuk a gyerekekre, és nincs lehetőség arra sem, hogy kifejezhessék a megoldás során alakuló gondolataikat, meghallgathassák mások ötleteit, könnyen elhalványodhatnak az élményemlékek, és végül maradandó hatás talán nem is születik belőlük. Nagyon nem mindegy, hogy milyen konkrét tapasztalati előzményekre támaszkodik egy-egy ilyen feladat. Lényeges az is, hogy hogyan illeszkednek egymáshoz a hasonló gondolkodást stimuláló problémahelyzetek. Hogy lehet-e, érdemes-e felidézni, alkalmazni a már egyszer működő gondolkodásmódot. Igen fontos szerepe van annak a légkörnek, amelyben a tévedéseknek, értelmes vitáknak, gondolatok megmutatásának, szavakkal, írásban való kifejezésének, a megismert eljárások tudatosításának, rendszerezésének is helye és lehetősége van. Elengedhetetlen feltétele a gondolkodás fejlődésének az elegendő idő, a türelem, hogy ne zárja le a problémamegoldást a valaki által kimondott jó „eredmény". Sokszor maradhasson nyitva, lehessen továbbfűzni, újabb nézőpontból újra és újra visszatérni rá.

A fent elemzett feladatok abból a tankönyvcsaládból származnak, amelyek évtizedeken keresztül támogatták a kisiskolások matematikai fejlesztését. Hasznos lenne, ha Magyarországon is újból hozzájuthatnának az iskolák ezekhez a kiadványokhoz!

Felhasznált irodalom

C. Neményi Eszter (2003): Gondolkodási és megismerési módszerek. In: C. Neményi Eszter és Sztrókay Vera *Matematika segédanyag az esti tanítóképzéshez*. ELTE TÓFK, Budapest, 223–265.

C. Neményi Eszter és Sz. Oravecz Márta (1998): *Matematika tankönyv, Útjelző és Munkafüzet 1. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Sz. Oravecz Márta (1998): *Matematika tankönyv, Útjelző és Munkafüzet 2. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Wéber Anikó (2002): *Matematika tankönyv és munkafüzet 3. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Wéber Anikó (é.n.): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához.* Nemzeti Tankönyvkiadó–Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

C. Neményi Eszter és Káldi Éva (2002): *Matematika tankönyv és munkafüzet 4. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Pedagógiai szakértői értékelőlap URL: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tankonyv/05a_pedagogiai_szakertoi_ertekelolap_tk_20170330.doc (letöltés ideje: 2017. márc. 30.)

Richard R. Skemp (2005): *A matematikatanulás pszichológiája*. SHL Kiadó, Budapest.

Robert Fisher (2002): *Hogyan tanítsuk gyermekeinket gondolkodni?* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Varga Tamás (1977): *A matematika tanításának várható fejlődése. A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Vidákovics Tibor (2008): *A matematikai kompetencia fejlesztése más tantárgyak keretei között.* Education Kht, Budapest.

Learning about thinking processes

One of the key questions of successful math problem solving is whether students can choose and apply the right way of thinking. To do this, you need to know and master several thinking processes. What can the teacher do to help their pupils learn about thinking methods? The answer is clear: it contributes to the development of learning skills and self-learning ways by organizing activities that are well-suited to problem orientation and experience. In this article, I analyze examples of textbook tasks that can be used to support learning methods.

Keywords*: learning, thinking process, skill development, creation, conceptualization*

Zsinkó Erzsébet (2018): Gondolkodási eljárások tanulása. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 99–107.